CHAPITRE 8 > Inéquations et systèmes d'équations

RAPPEL Introduction aux systèmes d'équations du premier degré à deux variables

Page 326

1. a) $(3, 6)$ **b)** $(4, 1)$ **c)** $(\approx -4{,}5, \approx -3{,}5)$

d) $(4, -1)$ **e)** $\left(5\frac{2}{3}, 9\frac{1}{3}\right)$ **f)** $(28{,}75, 12{,}25)$

Page 327

2. a) $y = -2x + 5$
$y = -0{,}25x - 2{,}5$

b) $y = 3x + 8$
$y = 6x + 9$

3. a)
$x + 2 = -x + 6$
$2x = 4$
$x = 2$
$y = 2 + 2$
$= 4$
$(2, 4)$

b)
$-3x + 1 = 0{,}5x + 8$
$-3{,}5x = 7$
$x = -2$
$y = -3 \times -2 + 1$
$= 7$
$(-2, 7)$

c)
$-x + 12 = 0{,}4x + 5$
$-1{,}4x = -7$
$x = 5$
$y = -5 + 12$
$= 7$
$(5, 7)$

d)
$4x - 7 = 3x + 2$
$x = 9$
$y = 4 \times 9 - 7$
$= 29$
$(9, 29)$

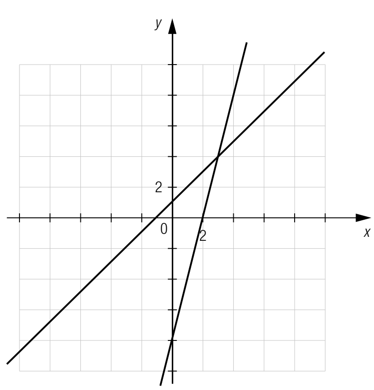
e)
$\frac{x}{2} + 3 = -\frac{x}{3} - 6$
$\frac{5x}{6} = -9$
$x = -10{,}8$
$y = -\frac{10{,}8}{2} + 3$
$= -2{,}4$
$(-10{,}8, -2{,}4)$

f)
$0{,}6x + 0{,}9 = 0{,}3x - 2{,}7$
$0{,}3x = -3{,}6$
$x = -12$
$y = 0{,}6 \times -12 + 0{,}9$
$= -6{,}3$
$(-12, -6{,}3)$

4. 1 B, 2 C, 3 A, 4 D

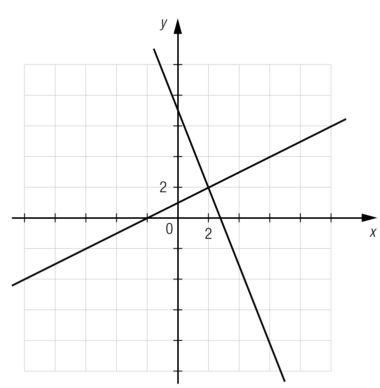
Page 328

5. a) 1)



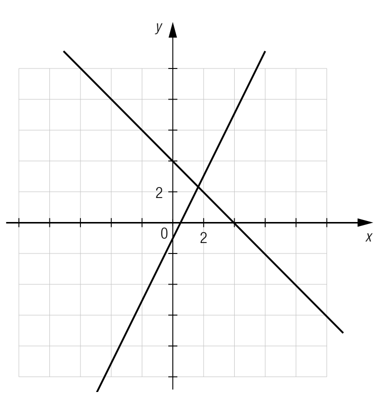
2) $(3, 4)$

b) 1)



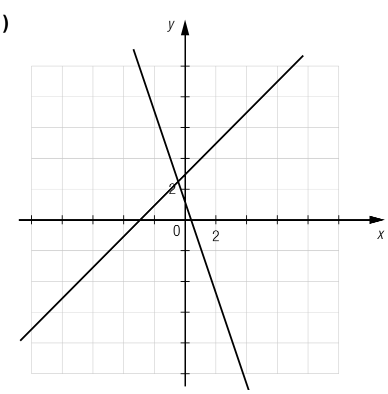
2) $(2, 2)$

c) 1)



2) $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

d) 1)



2) $(-0{,}5, 2{,}5)$

Page 329

6. **a)** 1) x : premier nombre
y : second nombre

2) $x = 3y + 2$
$x = 4y - 8$

3) Résoudre l'équation :
$3y + 2 = 4y - 8$
$^{-}y = {}^{-}10$
$y = 10$
Donc, $x = 3 \times 10 + 2$
$= 32$

Réponse : $x = 32$ et $y = 10$
Le premier nombre est 32 et le second est 10.

b) 1) x : nombre de produits vendus
y : salaire reçu (en $)

2) $y = 15x + 150$
$y = 18x + 75$

3) Résoudre l'équation :
$15x + 150 = 18x + 75$
$^{-}3x = {}^{-}75$
$x = 25$
Donc, $y = 15 \times 25 + 150$
$= 525$

Réponse : $x = 25$ et $y = 525$
Lorsqu'ils vendent 25 produits chacun, Pascal et Érika reçoivent le même salaire, soit 525 $.

c) 1) x : nombre de jours
y : nombre de millions de bactéries

2) $y = 2x + 4$
$y = 2{,}5x + 3$

3) Résoudre l'équation :
$2x + 4 = 2{,}5x + 3$
$^{-}0{,}5x = {}^{-}1$
$x = 2$
Donc, $y = 2 \times 2 + 4$
$= 8$

Réponse : $x = 2$ et $y = 8$
Dans chacune des deux boîtes de Pétri, le nombre de bactéries sera de 8 millions après 2 jours.

Page 330

7. La droite qui correspond à l'évolution du placement 1 passe par les points (0, 16) et (16, 17). Son équation est $y = \frac{x}{16} + 16$.

La droite qui correspond à l'évolution du placement 2 passe par les points (0, 8) et (16, 10). Son équation est $y = \frac{x}{8} + 8$.

On peut résoudre le système d'équations par la méthode de comparaison :

$\frac{x}{16} + 16 = \frac{x}{8} + 8$
$\frac{x}{16} - \frac{2x}{16} = {}^{-}8$
$^{-}\frac{x}{16} = {}^{-}8$
$x = 128$

$y = \frac{128}{8} + 8$
$= 24$

Réponse : Les placements auront la même valeur de 24 000 $ après 128 mois.

8.
- Pour déterminer le point A, on résout le système d'équations :
$y = 0{,}5x + 19$
$y = {}^{-}2x + 44$
$0{,}5x + 19 = {}^{-}2x + 44$
$x = 10$
Donc, $y = {}^{-}2 \times 10 + 44$
$= 24$
La solution est (10, 24).

- Pour déterminer le point B, on résout le système d'équations :
$y = 0{,}5x + 19$
$y = 3x - 56$
$0{,}5x + 19 = 3x - 56$
$x = 30$
Donc, $y = 0{,}5 \times 30 + 19$
$= 34$
La solution est (30, 34).

- Pour déterminer le point C, on résout le système d'équations :
$y = 3x - 56$
$y = {}^{-}2x + 44$
$3x - 56 = {}^{-}2x + 44$
$x = 20$
Donc, $y = 3 \times 20 - 56$
$= 4$
La solution est (20, 4).

Réponse : Les postes de contrôle sont situés aux points A(10, 24), B(30, 34) et C(20, 4).

SECTION 8.1 Résolution d'un système d'équations du premier degré à deux variables

Page 332

1. **a)** La méthode de réduction. **b)** La méthode de substitution. **c)** La méthode de réduction.
d) La méthode de réduction. **e)** La méthode de substitution. **f)** La méthode de comparaison.

Page 333

2. **a)** Non. **b)** Oui. **c)** Non. **d)** Oui. **e)** Non. **f)** Oui.

3. Ces systèmes d'équations n'admettent aucun couple-solution.

4. **a)** 1)

x	y_1	y_2
$^{-}1$	**2**	**5**
1	**1**	**3**
3	**0**	**1**
5	**$^{-}1$**	**$^{-}1$**
7	**$^{-}2$**	**$^{-}3$**

2) $(5, {}^{-}1)$

b) 1)

x	y_1	y_2
0	**1**	**10**
2	**5**	**8**
3	**7**	**7**
6	**13**	**4**
8	**17**	**2**

2) (3, 7)

c) 1)

x	y_1	y_2
$^{-}6$	**5**	**8**
$^{-}5$	**4,5**	**6**
$^{-}4$	**4**	**4**
$^{-}3$	**3,5**	**2**
$^{-}2$	**3**	**0**

2) $({}^{-}4, 4)$

d) 1)

x	y_1	y_2
$^{-}6$	**17**	**17**
$^{-}4$	**15**	**13**
$^{-}2$	**13**	**9**
0	**11**	**5**
2	**9**	**1**

2) $({}^{-}6, 17)$

Page 334

5. a) **1)** x : nombre de billets pour enfant vendus
y : nombre de billets pour adulte vendus

2) $x + y = 310$
$8x + 15y = 3600$

b) **1)** x : nombre de filles
y : nombre de garçons

2) $x + y = 865$
$y = x - 55$

c) **1)** x : montant de base (en $)
y : montant journalier (en $)

2) $x + 8y = 1000$
$x + 12y = 1400$

d) **1)** x : nombre de plants de tomates
y : nombre de plants de concombres

2) $x - y = 300$
$2x + 3y = 3500$

6. a) $3y = {}^-6x + 12$
$y = {}^-2x + 4$

b) ${}^-4y = {}^-2x + 6$
$y = 0{,}5x - 1{,}5$

c) $3y = {}^-0{,}75x - 21$
$y = {}^-0{,}25x - 7$

d) $y = 0{,}75x + 1{,}5$

Page 335

7. a)
$$\begin{aligned} x + 2(2x - 1) &= 13 \\ 5x - 2 &= 13 \\ x &= 3 \\ y &= 2 \times 3 - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$
(3, 5)

b)
$$\begin{aligned} 4(6y + 35) - 5y &= 26 \\ 19y + 140 &= 26 \\ y &= {}^-6 \\ x &= 6 \times {}^-6 + 35 \\ &= {}^-1 \end{aligned}$$
$({}^-1, {}^-6)$

c)
$$\begin{aligned} 3x + 2({}^-5x + 8) &= 2 \\ {}^-7x + 16 &= 2 \\ x &= 2 \\ y &= {}^-5 \times 2 + 8 \\ &= {}^-2 \end{aligned}$$
$(2, {}^-2)$

d)
$$\begin{aligned} y + 3(2y - 3) &= 19 \\ 7y - 9 &= 19 \\ y &= 4 \\ x &= 2 \times 4 - 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$
(5, 4)

8. a)
$$\begin{array}{r} 3x - 3y = 6 \\ -\ (3x - 2y = 14) \\ \hline {}^-y = {}^-8 \\ y = 8 \end{array}$$
$$\begin{aligned} 3x - 3 \times 8 &= 6 \\ 3x &= 30 \\ x &= 10 \end{aligned}$$
(10, 8)

b)
$$\begin{array}{r} 5x - 6y - 5 = 0 \\ -\ (5x + 15y - 5 = 0) \\ \hline {}^-21y = 0 \\ y = 0 \end{array}$$
$$\begin{aligned} 5x - 6 \times 0 - 5 &= 0 \\ 5x &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$
(1, 0)

c)
$$\begin{array}{r} 8x - 6y = {}^-8 \\ +\ {}^-15x + 6y = 57 \\ \hline {}^-7x = 49 \\ x = {}^-7 \end{array}$$
$$\begin{aligned} 8 \times {}^-7 - 6y &= {}^-8 \\ {}^-6y &= 48 \\ y &= {}^-8 \end{aligned}$$
$({}^-7, {}^-8)$

d)
$$\begin{array}{r} 4x + 3y + 2 = 0 \\ -\ (4x - 12y - 8 = 0) \\ \hline 15y + 10 = 0 \\ 15y = {}^-10 \\ y = {}^-\frac{2}{3} \end{array}$$
$$\begin{aligned} 4x + 3 \times {}^-\tfrac{2}{3} + 2 &= 0 \\ 4x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$
$\left(0, {}^-\frac{2}{3}\right)$

Page 336

9. a) ① $2x - (2x + 4) - 8 = 0$
${}^-12 \neq 0$

② $y - 4 - y = 5$
${}^-4 \neq 5$

③ ${}^-2({}^-y - 7) - 2y - 8 = 2$
$6 \neq 2$

Réponse : On obtient une inégalité de deux nombres (sans variable).

b) Si la résolution d'un système d'équations du premier degré à deux variables donne une inégalité sans variable, alors le système admet l'ensemble vide comme solution.

c) ④ $3x - (3x + 4) + 4 = 0$
$0 = 0$

⑤ $3(y - 5) - 3y + 17 = 2$
$2 = 2$

⑥ $2(2y - 7) - 4y = {}^-14$
${}^-14 = {}^-14$

Réponse : On obtient une égalité de deux nombres (sans variable).

d) Si la résolution d'un système d'équations du premier degré à deux variables donne une égalité sans variable, alors le système admet une infinité de solutions.

Page 337

10. Variables

x : nombre de questions à réponses courtes
y : nombre de questions à développement

Système d'équations

$x + y = 20$
$4x + 6y = 100$

On résout le système par la méthode de réduction.
$$\begin{array}{r} 4x + 4y = 80 \\ -\ (4x + 6y = 100) \\ \hline {}^-2y = {}^-20 \end{array}$$
$$\begin{aligned} {}^-2y &= {}^-20 \\ y &= 10 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x + y &= 20 \\ x + 10 &= 20 \\ x &= 10 \end{aligned}$$
La solution est (10, 10).

Réponse : Il y a 10 questions à réponses courtes et 10 questions à développement.

11. Variables

x : nombre de litres du format A
y : nombre de litres du format B

Système d'équations
$18x + 25y = 3455$
$22x + 30y = 4170$

On résout le système d'équations par la méthode de réduction :

$$\begin{array}{rl} 108x + 150y &= 20\,730 \\ -\ (110x + 150y &= 20\,850) \\ \hline ^{-}2x \quad &= {}^{-}120 \\ x &= 60 \end{array}$$

$x = 60 \Rightarrow$ Un baril de format A contient 60 L de NaOH.

$$\begin{aligned} 18 \times 60 + 25y &= 3455 \\ 1080 + 25y &= 3455 \\ y &= 95 \end{aligned}$$

$y = 95 \Rightarrow$ Un baril de format B contient 95 L de NaOH.

On cherche le nombre n de barils de format B commandés tel que :

$$\begin{aligned} 31 \times 60 + n \times 95 &= 5470 \\ 1860 + 95n &= 5470 \\ 95n &= 3610 \\ n &= 38 \end{aligned}$$

Réponse : Cette commande comprend 38 barils de format B.

Page 338

12. Variables

x : nombre de jours passés à Orlando
y : nombre de jours passés à Miami

Système d'équations
$x + y = 14$
$200x + 260y = 2980$

On résout le système par la méthode de réduction.

$$\begin{array}{rl} 200x + 200y &= 2800 \\ -\ (200x + 260y &= 2980) \\ \hline ^{-}60y &= {}^{-}180 \\ y &= 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x + 3 &= 14 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

Réponse : Nous passerons 11 jours à Orlando et 3 jours à Miami.

13. Soit y le coût du forfait (en \$) et x, le nombre de minutes utilisées.

Équation associée au forfait A :
pente de la droite : $\frac{20 - 15}{30 - 0} = \frac{1}{6}$
ordonnée à l'origine : 15
équation : $y = \frac{x}{6} + 15$

Équation associée au forfait B :
pente de la droite : $\frac{29 - 25}{40 - 0} = \frac{1}{10}$
ordonnée à l'origine : 25
équation : $y = \frac{x}{10} + 25$

On résout ce système par la méthode de comparaison.

$\frac{x}{6} + 15 = \frac{x}{10} + 25$
$x = 150$

$y = \frac{150}{6} + 15$
$y = 40$

Réponse : Mon ami a raison : pour 150 minutes utilisées, le coût est le même pour les deux forfaits, soit 40 \$.

SECTION 8.2 Résolution graphique d'une inéquation du premier degré à deux variables

Page 340

1. **a)** $y \leq 2x - 4$ **b)** $y \geq 2x + 4$ **c)** $y > \frac{3x}{4} - 2$ **d)** $y \leq {}^{-}\frac{3}{2}x + 4$ **e)** $y < \frac{2}{3}x - 2$ **f)** $y \geq 0{,}75x - 4$

2. **a)** 1) x : revenu de cette année (en \$)
y : revenu de l'année prochaine (en \$)
2) $y \geq x + 1\,000\,000$

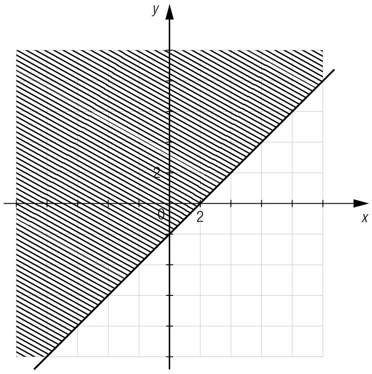
b) 1) x : nombre de billets pour enfant vendus
y : nombre de billets pour adulte vendus
2) $10x + 20y \geq 1400$

c) 1) x : nombre de places en classe affaires
y : nombre de places en classe économique
2) $x + y \leq 800$

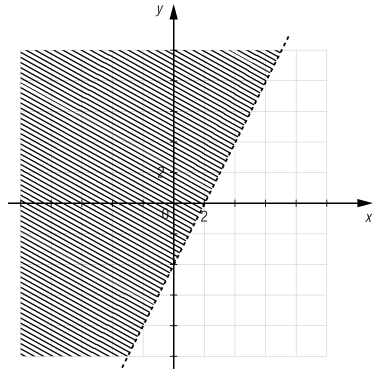
d) 1) x : énergie fournie par un panneau solaire (en watts)
y : énergie fournie par une éolienne (en watts)
2) $x + y \leq 10\,000$

Page 341

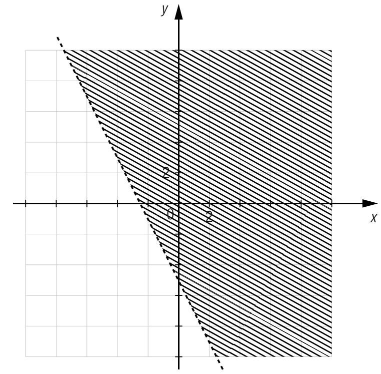
3. a)



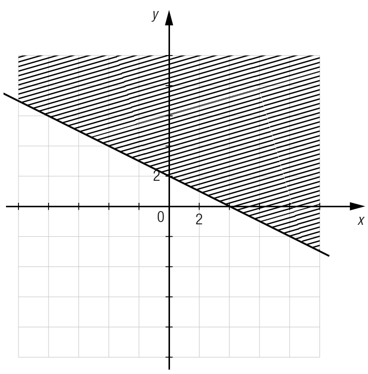
b)



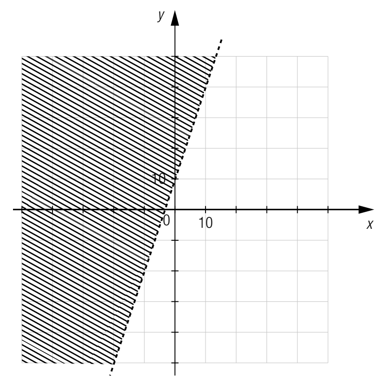
c)



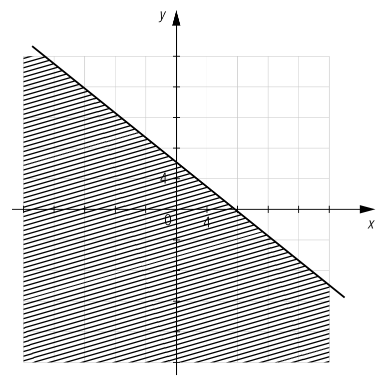
d)



e)



f)



Page 342

4. a) Pente : $\frac{^-8 - 0}{0 - 4} = 2$

Ordonnée à l'origine : $^-8$
Équation de la frontière :
$y = 2x - 8$
Inéquation : $y > 2x - 8$

B

b) Pente : $\frac{2 - 0}{^-2 - 2} = {^-0{,}5}$

$0 = {^-0{,}5} \times 2 + b \Rightarrow b = 1$
Équation de la frontière :
$y = {^-0{,}5}x + 1$
Inéquation : $y \leq {^-0{,}5}x + 1$

G

c) Pente : $\frac{0 - 6}{^-6 - 0} = 1$

Ordonnée à l'origine : 6
Équation de la frontière :
$y = x + 6$
Inéquation : $y < x + 6$

E

d) Pente : $\frac{0 - {^-6}}{^-2 - 0} = {^-3}$

Ordonnée à l'origine : $^-6$
Équation de la frontière :
$y = {^-3}x - 6$
Inéquation : $y \geq {^-3}x - 6$

L

e) Pente : $\frac{0 - {^-2}}{4 - 0} = 0{,}5$

Ordonnée à l'origine : $^-2$
Équation de la frontière :
$y = 0{,}5x - 2$
Inéquation : $y > 0{,}5x - 2$

C

f) Pente : $\frac{2 - {^-2}}{0 - 2} = {^-2}$

Ordonnée à l'origine : 2
Équation de la frontière :
$y = {^-2}x - 2$
Inéquation : $y \leq {^-2}x + 2$

J

5. a) A, D, E, G et H.

b) E, F, G et H.

c) B, C, D et I.

Page 343

6. a) Pente : $\frac{6 - 9}{1 - 4} = 1$

$6 = 1 \times 1 + b$
$b = 5$

Équation de la frontière :
$y = x + 5$

Le point (0, 0) fait partie de la région-solution :
$0 < 0 + 5$

$y < x + 5$

b) Pente : $\frac{5 - 3}{2 - 6} = {^-0{,}5}$

$5 = {^-0{,}5} \times 2 + b$
$b = 6$

Équation de la frontière :
$y = {^-0{,}5}x + 6$

Le point (0, 0) ne fait pas partie de la région-solution :
$0 \ngeq {^-0{,}5} \times 0 + 6$

$y \geq {^-0{,}5}x + 6$

c) Pente : $\frac{0 - 12}{^-8 - 0} = 1{,}5$

$0 = 1{,}5 \times {^-8} + b$
$b = 12$

Équation de la frontière :
$y = 1{,}5x + 12$

Le point (0, 0) fait partie de la région-solution :
$0 \leq 1{,}5 \times 0 + 12$

$y \leq 1{,}5x + 12$

d) Pente : $\frac{12 - 4}{^{-}16 - ^{-}4} = ^{-}\frac{2}{3}$

$4 = ^{-}\frac{2}{3} \times ^{-}4 + b$

$b = \frac{4}{3}$

Équation de la frontière :

$y = ^{-}\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

Le point (0, 0) ne fait pas partie de la région-solution :

$0 \not> ^{-}\frac{2}{3} \times 0 + \frac{4}{3}$

$y > ^{-}\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

e) Pente : $\frac{3 - ^{-}2}{^{-}2 - 3} = ^{-}1$

$^{-}2 = ^{-}1 \times 3 + b$

$b = 1$

Équation de la frontière :

$y = ^{-}x + 1$

Le point (0, 0) fait partie de la région-solution :

$0 < 0 + 1$

$y < ^{-}x + 1$

f) Pente : $\frac{6 - 3}{8 - 2} = 0{,}5$

$3 = 0{,}5 \times 2 + b$

$b = 2$

Équation de la frontière :

$y = 0{,}5x + 2$

Le point (0, 0) fait partie de la région-solution :

$0 < 0{,}5 \times 0 + 2$

$y < 0{,}5x + 2$

Page 344

7. Inéquation associée à la situation : $4(y + 1) < 6(x + 2)$, où x et y sont des entiers strictement positifs.

Droite-frontière : $4(y + 1) = 6(x + 2)$

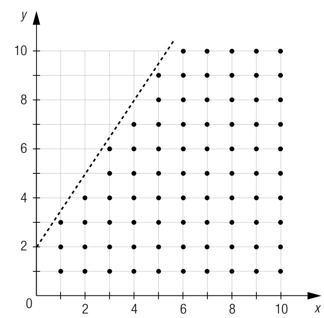
$4y + 4 = 6x + 12$

$4y = 6x + 8$

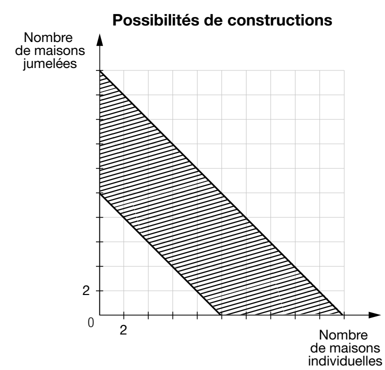
$y = 1{,}5x + 2$

Tous les points à coordonnées entières de la région située sous la droite d'équation $y = 1{,}5x + 2$ sont des solutions.

Sébastien a donc raison, il existe une infinité de mesures entières strictement positives pour x et y telles que le périmètre du carré est inférieur au périmètre de l'hexagone.



8. Les choix pour l'investisseur correspondent à tous les couples de coordonnées entières situées entre les deux droites et sur celles-ci. Les choix sont des solutions des inéquations $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 10$ et $x + y \leq 20$.
Par exemple, il peut construire 12 maisons individuelles et 8 maisons jumelées ou 13 maisons jumelées et 4 maisons individuelles.



Page 345

9. Équations correspondant à chaque côté du parallélogramme :

Droite qui passe par $\overline{AB}$:

Pente : $\frac{7 - 2}{6 - 4} = 2{,}5$

Ordonnée à l'origine : $2 = 2{,}5 \times 4 + b$

$b = ^{-}8$

$y = 2{,}5x - 8$

Droite qui passe par $\overline{BC}$:

Pente : $\frac{7 - 6}{6 - 4} = 0{,}5$

Ordonnée à l'origine : $6 = 0{,}5 \times 4 + b$

$b = 4$

$y = 0{,}5x + 4$

Droite qui passe par $\overline{CD}$:

Pente : 2,5

Ordonnée à l'origine : $6 = 2{,}5 \times 4 + b$

$b = ^{-}4$

$y = 2{,}5x - 4$

Droite qui passe par $\overline{AD}$:

Pente : 0,5

Ordonnée à l'origine : $2 = 0{,}5 \times 4 + b$

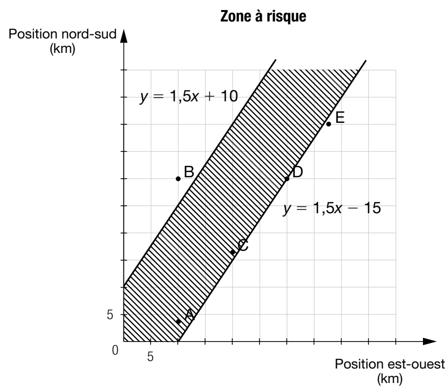
$b = 0$

$y = 0{,}5x$

On déduit les quatre inéquations :

$y > 2{,}5x - 8$, $y < 0{,}5x + 4$, $y < 2{,}5x - 4$ et $y > 0{,}5x$.

10. a)



b) Le point (0, 0) fait partie de l'ensemble-solution de chacune des inéquations.
Frontière supérieure :
$0 \leq 1{,}5 \times 0 + 10$ est vrai, alors $y \leq 1{,}5x + 10$.
Frontière inférieure :
$0 \geq 1{,}5 \times 0 - 15$ est vrai, alors $y \geq 1{,}5x - 15$.

c) Les villes A, C et D sont situées dans la zone à risque, car leurs coordonnées sont des solutions des deux inéquations délimitant la zone.

SECTION 8.3 Résolution graphique d'une inéquation du second degré à deux variables

Page 346

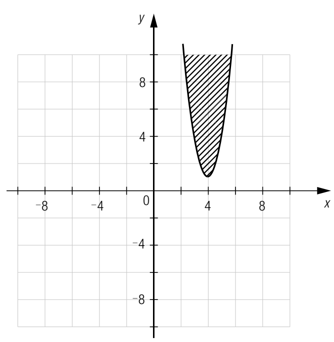
1. a) Le point (3, 0) fait partie de la région-solution :
$0 \geq 0{,}5(3 - 3)^2 - 4$
$0 \geq {}^{-}4$ est vrai.
$y \geq 0{,}5(x - 3)^2 - 4$

b) Le point (0, 0) fait partie de la région-solution :
$0 < {}^{-}2(0)^2 + 4(0) + 3$
$0 < 3$ est vrai.
$y < {}^{-}2x^2 + 4x + 3$

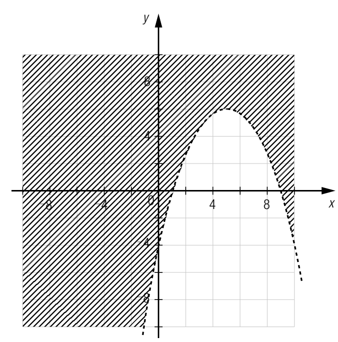
c) Le point (0, 0) ne fait pas partie de la région-solution :
$0 \leq 1{,}2(0 - 3)(0 + 2)$
$0 \leq {}^{-}7{,}2$ est faux.
$y \leq 1{,}2(x - 3)(x + 2)$

Page 347

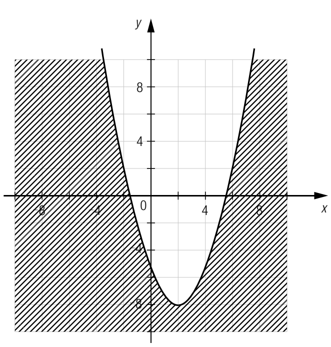
2. a)



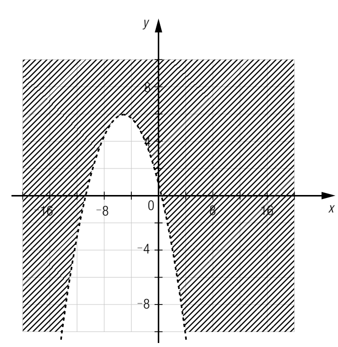
b)



c)



d)



Page 348

3. a)
$y = a(x - h)^2 + k$
$6 = a(7 - 5)^2 + 2$
$6 = 4a + 2$
$4 = 4a$
$a = 1$

$y = (x - 5)^2 + 2$
$y < (x - 5)^2 + 2$

b)
$y = a(x - h)^2 + k$
$2 = a(1 - 3)^2 + 8$
$2 = 4a + 8$
${}^{-}6 = 4a$
$a = {}^{-}1{,}5$

$y = {}^{-}1{,}5(x - 3)^2 + 8$
$y \leq {}^{-}1{,}5(x - 3)^2 + 8$

c)
$y = a(x - h)^2 + k$
${}^{-}2{,}4 = a(1 + 1)^2 - 4$
${}^{-}2{,}4 = 4a - 4$
$1{,}6 = 4a$
$a = 0{,}4$

$y = 0{,}4(x + 1)^2 - 4$
$y < 0{,}4(x + 1)^2 - 4$

d)
$y = a(x - h)^2 + k$
${}^{-}1 = a({}^{-}3 - 2)^2 + 4$
${}^{-}1 = 25a + 4$
${}^{-}5 = 25a$
$a = {}^{-}0{,}2$

$y = {}^{-}0{,}2(x - 2)^2 + 4$
$y \leq {}^{-}0{,}2(x - 2)^2 + 4$

Page 349

4. **a)** $\leq$ **b)** $\leq$ **c)** $<$ **d)** $\leq$ **e)** $>$ **f)** $<$ **g)** $>$ **h)** $\leq$ **i)** $\geq$

5. **a)** $y < {}^{-}0{,}05(x - 8)^2 + 25$

b)

x	1	4	8	12	16	18	24	26	28
y	22	24	25	24	22	20	12	8	4

Il faut déterminer si tous les couples de la table de valeurs vérifient l'inéquation $y < {}^{-}0{,}05(x - 8)^2 + 25$.

- Par exemple, pour le couple (1, 22) :
  $22 < {}^{-}0{,}05(1 - 8)^2 + 25$
  $22 < {}^{-}0{,}05({}^{-}7)^2 + 25$
  $22 < {}^{-}0{,}05 \times 49 + 25$
  $22 < {}^{-}2{,}45 + 25$
  $22 < 22{,}55$
  Le couple (1, 22) vérifie l'inéquation.
- Pour le couple (16, 22) :
  $22 < {}^{-}0{,}05(16 - 8)^2 + 25$
  $22 < {}^{-}0{,}05(8)^2 + 25$
  $22 < {}^{-}0{,}05 \times 64 + 25$
  $22 < {}^{-}3{,}2 + 25$
  $22 \not< 21{,}8$
  Le couple (16, 22) ne vérifie pas l'inéquation.

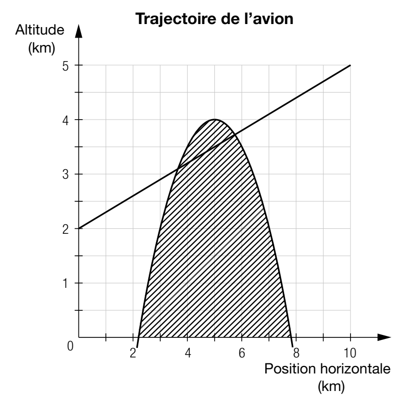
Réponse : Les données (8, 25), (16, 22) et (18, 20) ne font pas partie de l'ensemble-solution de l'inéquation $y < {}^{-}0{,}05(x - 8)^2 + 25$. L'expérience a donc échoué.

Page 350

6. Les coordonnées du sommet de la parabole sont (5, 4).
La courbe passe par les points de coordonnées (3, 2) et (7, 2).

La droite passe par les points (0, 2) et (5, 3,5).

Le tracé précis de la parabole et de la droite dans le plan cartésien montre que la trajectoire de l'avion passe dans la zone interdite.



7. Les équations associées à la forme de la structure sont :

Courbe intérieure

Sommet : (50, 80)
Point de la courbe : (30, 0)

$0 = a(30 - 50)^2 + 80$
$a = {}^{-}0{,}2$

$y = {}^{-}0{,}2(x - 50)^2 + 80$

Courbe extérieure

Sommet : (50, 85)
Point de la courbe : (25, 0)

$0 = a(25 - 50)^2 + 85$
$a = {}^{-}0{,}136$

$y = {}^{-}0{,}136(x - 50)^2 + 85$

Réponse : Les inéquations sont : $y \geq {}^{-}0{,}2(x - 50)^2 + 80$
$y \leq {}^{-}0{,}136(x - 50)^2 + 85$

Page 351

8. La courbe dont le sommet A(h, 12,5) est un maximum passe par (0, 0).

L'abscisse de A est h, alors l'abscisse de B est 2h par symétrie.

La pente de la droite qui passe par les points A et B est ${}^{-}2{,}5$.

Cette droite passe par les points A(h, 12,5) et B(2h, 0).

La pente de la droite : ${}^{-}2{,}5 = \frac{12{,}5 - 0}{h - 2h}$, donc h = 5.

Coordonnées de A : (5, 12,5)

Coordonnées de B : (10, 0)

Équation de la parabole de sommet A :
$y = {}^{-}0{,}5(x - 5)^2 + 12{,}5$

Équation de la parabole de sommet B : $y = 0{,}5(x - 10)^2$

Réponse : Les inéquations qui permettent de colorer la zone en vert sont $y < {}^{-}0{,}5(x - 5)^2 + 12{,}5$ et $y > 0{,}5(x - 10)^2$.

9. x : temps (en mois)
y : concentration (en mg/L)

On doit vérifier si le couple (20, 33) appartient à l'ensemble-solution.

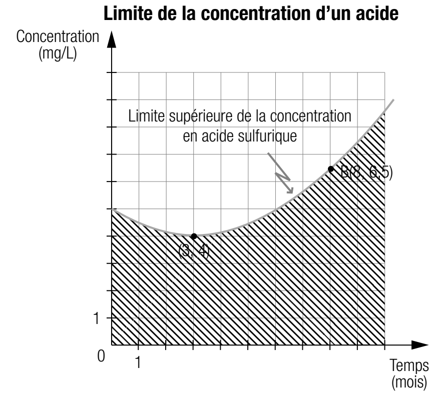
Équation de la courbe frontière :

$y = a(x - h)^2 + k$
$6{,}5 = a(8 - 3)^2 + 4$
$6{,}5 = 25a + 4$
$a = 0{,}1$
$y = 0{,}1(x - 3)^2 + 4$

Le point (0, 0) fait partie de la région-solution, donc l'inéquation est : $y \leq 0{,}1(x - 3)^2 + 4$, car $0 \leq 0{,}1(0 - 3)^2 + 4$ est vrai.

On hachure la région au-dessous de la courbe.

Lorsque $x = 20$ mois, la concentration y doit être telle que :
$y \leq 0{,}1(20 - 3)^2 + 4$
$y \leq 32{,}9$ mg/L
$33 \not\leq 32{,}9$
Le couple (20, 33) n'appartient pas à l'ensemble-solution.



Réponse : Il est donc impossible d'avoir une concentration de 33 mg/L au bout de 20 mois si l'on respecte l'exigence de l'étude.

SECTION 8.4 Système d'équations à deux variables composé d'une équation du premier degré et d'une équation du second degré

Page 353

1. a) $2x - y = 8$
$2x - 8 = y$

$y = 2(x - 3)^2 + 4$
$= 2(x - 3)(x - 3) + 4$
$= 2(x^2 - 6x + 9) + 4$
$= 2x^2 - 12x + 18 + 4$
$= 2x^2 - 12x + 22$

$y = 2x - 8$
$y = 2x^2 - 12x + 22$

b) $2x + 4y - 12 = 0$
$2x - 12 = {}^-4y$
$\frac{2x - 12}{^-4} = y$
${}^-0{,}5x + 3 = y$

$y = {}^-(x + 3)^2 + 1$
$= {}^-(x + 3)(x + 3) + 1$
$= {}^-(x^2 + 6x + 9) + 1$
$= {}^-x^2 - 6x - 9 + 1$
$= {}^-x^2 - 6x - 8$

$y = {}^-0{,}5x + 3$
$y = {}^-x^2 - 6x - 8$

c) $y = 4x + 0{,}5$
$y = {}^-0{,}2x^2 - 2x - 15$

d) $y = 0{,}8x - 1{,}2$
$y = x^2 + 4x + 5$

2. a) $(\approx 0{,}2, \approx {}^-1{,}9)$
$(\approx 1{,}5, \approx {}^-2{,}5)$

b) $(\approx {}^-2{,}6, \approx 2{,}1)$
$(\approx 0{,}1, \approx {}^-0{,}5)$

c) $(\approx {}^-4{,}1, \approx {}^-3{,}2)$
$(\approx 0{,}8, \approx 1{,}6)$

Page 354

3. a) $2x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2x + 2$
$2x + 2 = 2x^2 + 5x - 3$
$2x^2 + 3x - 5 = 0$

$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= \frac{^-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times {}^-5}}{2 \times 2}$
$= \frac{^-3 \pm \sqrt{49}}{4}$

$x_1 = {}^-2{,}5$ et $x_2 = 1$

$y_1 = 2x_1 + 2$
$= 2 \times {}^-2{,}5 + 2$
$= {}^-3$

$y_2 = 2x_2 + 2$
$= 2 \times 1 + 2$
$= 4$

$({}^-2{,}5, {}^-3)$ et (1, 4).

b) $3x + 2 = 3x^2 + 5x - 3$
$3x^2 + 2x - 5 = 0$

$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= \frac{^-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 3 \times {}^-5}}{2 \times 3}$
$= \frac{^-2 \pm \sqrt{64}}{6}$

$x_1 = {}^-\frac{5}{3}$ et $x_2 = 1$

$y_1 = 3x_1 + 2$
$= 3\left({}^-\frac{5}{3}\right) + 2$
$= {}^-3$

$y_2 = 3x_2 + 2$
$= 3(1) + 2$
$= 5$

$\left({}^-\frac{5}{3}, {}^-3\right)$ et (1, 5).

c) $^-16x + 4y = 4 \Rightarrow y = 4x + 1$
$y = 4(x - 1)^2 + 5 \Rightarrow y = 4x^2 - 8x + 9$
$4x^2 - 8x + 9 = 4x + 1$
$4x^2 - 12x + 8 = 0$
$x = \dfrac{12 \pm \sqrt{(^-12)^2 - 4 \times 4 \times 8}}{2 \times 4}$
$= \dfrac{12 \pm \sqrt{16}}{8}$
$x_1 = 1$ et $x_2 = 2$
$y_1 = 4x_1 + 1 = 4 \times 1 + 1 = 5$ $y_2 = 4x_2 + 1 = 4 \times 2 + 1 = 9$
(1, 5) et (2, 9).

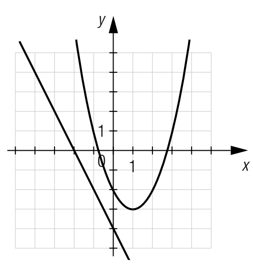
d) $2x - y + 8 = 0 \Rightarrow y = 2x + 8$
$^-x^2 + 5x - 5 = 2x + 8$
$^-x^2 + 3x - 13 = 0$
$x = \dfrac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= \dfrac{^-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times {}^-1 \times {}^-13}}{2 \times {}^-1}$
$= \dfrac{^-3 \pm \sqrt{^-43}}{^-2}$
La solution est $\varnothing$.

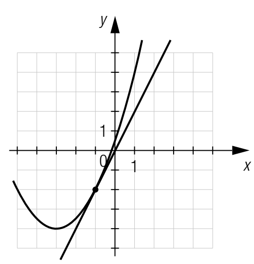
e) $x^2 + 4x - 2 = x^2 + 2x - 1$
$4x - 2 = 2x - 1$
$2x - 1 = 0$
$x = 0,5$
$y = 0,5^2 + 2 \times 0,5 - 1$
$= 0,25$
(0,5, 0,25)

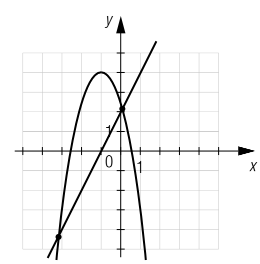
f) $y = {}^-2(x + 3)^2 + 7 \Rightarrow y = {}^-2x^2 - 12x - 11$
$y = {}^-2(x - 4)^2 + 3 \Rightarrow y = {}^-2x^2 + 16x - 29$
$^-2x^2 - 12x - 11 = {}^-2x^2 + 16x - 29$
$^-12x - 11 = 16x - 29$
$^-28x + 18 = 0$
$x \approx 0,64$
$y = {}^-2x^2 - 12x - 11$
$\approx {}^-2(0,64)^2 - 12 \times 0,64 - 11$
$\approx {}^-19,54$
($\approx$ 0,64, $\approx$ $^-$19,54)

Page 355

4. *Plusieurs réponses possibles. Exemples :*

a)


b)


c)


5. **Équation de la droite qui passe par les points (0, 10) et (7, $^-$4)**

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$= \dfrac{^-4 - 10}{7 - 0}$
$= {}^-2$
$y = {}^-2x + b$
$b = 10$
Donc, l'équation de la droite est $y = {}^-2x + 10$.

Équation de la parabole dont le sommet est S(7, $^-$4)

$y = a(x - 7)^2 - 4$
La parabole passe par (0, 20,5) :
$y = a(x - 7)^2 - 4$
$20,5 = a(0 - 7)^2 - 4$
$24,5 = 49a$
$a = 0,5$
Donc, l'équation de la parabole est $y = 0,5(x - 7)^2 - 4$.

Coordonnées du point C

$0,5(x - 7)^2 - 4 = {}^-2x + 10$
$0,5x^2 - 7x + 20,5 = {}^-2x + 10$
$0,5x^2 - 5x + 10,5 = 0$
$x = \dfrac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= \dfrac{5 \pm \sqrt{(^-5)^2 - 4 \times 0,5 \times 10,5}}{2 \times 0,5}$
$x_1 = 3$ et $x_2 = 7$ (on rejette x_2 étant donné la représentation graphique)
$y = {}^-2x + 10$
$= {}^-2 \times 3 + 10$
$= 4$

Réponse : Les coordonnées du point C sont (3, 4).

Page 356

6. **Équation de la droite passant par (1, $^-1$) et (0, $^-2$)**

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{^-2 - ^-1}{0 - 1} = 1$$

Donc, l'équation de la droite est $y = x - 2$, car $^-2$ est l'ordonnée à l'origine.

Équation de la parabole dont le sommet est S(7, 9)

$y = a(x - 7)^2 + 9$

La parabole passe par (1, $^-9$) :

$$\begin{aligned} y &= a(x - 7)^2 + 9 \\ ^-9 &= a(1 - 7)^2 + 9 \\ ^-18 &= 36a \\ a &= ^-0{,}5 \end{aligned}$$

Donc, l'équation de la parabole est $y = ^-0{,}5(x - 7)^2 + 9$.

Coordonnées des points d'intersection

$$\begin{aligned} ^-0{,}5(x - 7)^2 + 9 &= x - 2 \\ ^-0{,}5x^2 + 7x - 15{,}5 &= x - 2 \\ ^-0{,}5x^1 + 6x - 13{,}5 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{^-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times ^-0{,}5 \times ^-13{,}5}}{2 \times ^-0{,}5}$$

$x_1 = 3$ et $x_2 = 9$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 2 \\ &= 3 - 2 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_2 &= x_2 - 2 \\ &= 9 - 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Réponse : Les coordonnées des points d'intersection sont (3, 1) et (9, 7).

7. Équation correspondant au périmètre :
$y = 2((x - 2) + (x + 3)) = 4x + 2$

Équation correspondant à l'aire :
$y = (x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 &= 4x + 2 \\ x^2 - 3x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{(^-3)^2 - 4 \times 1 \times ^-8}}{2 \times 1}$$

$x_1 \approx ^-1{,}7$ et $x_2 \approx 4{,}7$

On rejette x_1, car la mesure d'un côté ne peut pas être négative.

Réponse : Lorsque la valeur de $x \approx 4{,}7$ cm, les valeurs du périmètre et de l'aire sont les mêmes.

Page 357

8. Pour démontrer que la droite est tangente à la courbe, il faut vérifier s'il y a 0, 1 ou 2 couples-solutions.

On doit résoudre le système d'équations $y = 2x - 3$
$y = x^2 - 6x + 13$

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= x^2 - 6x + 13 \\ x^2 - 8x + 16 &= 0 \\ (x - 4)^2 &= 0 \\ x - 4 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= 2 \times 4 - 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Il n'y a donc qu'une seule solution, le couple (4, 5). La droite est donc tangente à la parabole au point (4, 5).

Réponse : Sylvain a tort : la droite est tangente à la courbe au point (4, 5).

9. Pour connaître la longueur de chacune des poutres, il faut déterminer les ordonnées des points d'intersection. On doit donc résoudre le système d'équations :

$y = ^-0{,}25(x - 8)^2 + 10$
$y = 0{,}5x + 4$

$$\begin{aligned} ^-0{,}25(x - 8)^2 + 10 &= 0{,}5x + 4 \\ ^-0{,}25x^2 + 4x - 6 &= 0{,}5x + 4 \\ ^-0{,}25x^2 + 3{,}5x - 10 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{^-3{,}5 \pm \sqrt{(3{,}5)^2 - 4 \times ^-0{,}25 \times ^-10}}{2 \times ^-0{,}25} = \frac{^-3{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}}{^-0{,}5}$$

$x_1 = 4$ et $x_2 = 10$

$$\begin{aligned} y_1 &= 0{,}5x_1 + 4 \\ &= 0{,}5 \times 4 + 4 \\ &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_2 &= 0{,}5x_2 + 4 \\ &= 0{,}5 \times 10 + 4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Les coordonnées des points d'intersection sont (4, 6) et (10, 9). La longueur de chacune des poutres correspond à l'ordonnée de chacun de ces points d'intersection.

Réponse : La longueur de l'une des poutres est 6 m et la longueur de l'autre, 9 m.

Page 358

10. Moments où la balle et la caméra sont à la même altitude :

$$\begin{aligned} 5t + 10 &= ^-4{,}9t^2 + 39{,}2t \\ ^-4{,}9t^2 + 34{,}2t - 10 &= 0 \end{aligned}$$

$$t = \frac{^-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{^-34{,}2 \pm \sqrt{(34{,}2)^2 - 4 \times ^-4{,}9 \times ^-10}}{2 \times ^-4{,}9}$$

$t_1 \approx 0{,}31$ s et $t_2 \approx 6{,}67$ s

Entre ces deux moments, soit de 0,31 s environ à 6,67 s environ, la caméra se trouve à une altitude inférieure à celle de la balle : $6{,}67 - 0{,}31 \approx 6{,}37$s

Réponse : La caméra se trouve à une altitude inférieure à celle de la balle durant environ 6,37 s.

11. Aire du rectangle

$$\begin{aligned} A &= (2x + 5)(x - 6) \\ &= (2x^2 - 7x - 30)\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$2x^2 - 7x - 30 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 11x - 34 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{^-\text{b} \pm \sqrt{\text{b}^2 - 4\text{ac}}}{2\text{a}} \\ &= \frac{11 \pm \sqrt{(^-11)^2 - 4 \times 1 \times {}^-34}}{2 \times 1} \end{aligned}$$

$x_1 \approx {}^-2{,}52$ et $x_2 \approx 13{,}52$ (rejeter x_1)

Aire du carré

$$\begin{aligned} A &= (x + 2)^2 \\ &= (x^2 + 4x + 4)\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Périmètre du rectangle

$$\begin{aligned} P_{\text{rectangle}} &= 2(2x + 5) + 2(x - 6) \\ &= 6x - 2 \\ &\approx 6(13{,}52) - 2 \\ &\approx 79{,}09\ \text{cm} \end{aligned}$$

Périmètre du carré

$$\begin{aligned} P_{\text{carré}} &= 4(x + 2) \\ &= 4x + 8 \\ &\approx 4(13{,}52) + 8 \\ &\approx 62{,}06\ \text{cm} \end{aligned}$$

Réponse : Le périmètre du rectangle est d'environ 79,09 cm et celui du carré est d'environ 62,06 cm.

MÉLI-MÉLO

Page 359

1. a) Faux. Dans le premier cas, le système peut admettre 0, 1 ou une infinité de couples-solutions, alors que dans le second cas, il peut admettre 0, 1 ou 2 couples-solutions.

b) Faux. Si le symbole d'inégalité est $<$ ou $>$, la courbe de la parabole ne fait pas partie de l'ensemble-solution.

c) Vrai. **d)** Vrai.

2. a) Non. **b)** Oui. **c)** Oui. **d)** Non. **e)** Oui. **f)** Oui.

Page 360

3. a) 3
b) 4
c) 2

4. Droite 1 :

$$\begin{aligned} y &= 2x + \text{b} \\ ^-4 &= 2 \times 2 + \text{b} \\ ^-8 &= \text{b} \end{aligned}$$

Donc, $y = 2x - 8$

Droite 2 :

$$\begin{aligned} y &= {}^-3x + \text{b} \\ ^-4 &= {}^-3 \times 2 + \text{b} \\ 2 &= \text{b} \end{aligned}$$

Donc, $y = {}^-3x + 2$

$$\begin{aligned} y &= 2x - 8 \\ y &= {}^-3x + 2 \end{aligned}$$

5. 2

Page 361

6. a)

$$\begin{array}{r} 2x + y - 3 = 0 \\ -\ (2x + 6y + 20 = 0) \\ \hline {}^-5y - 23 = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} {}^-5y - 23 &= 0 \\ {}^-5y &= 23 \\ y &= {}^-4{,}6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= {}^-2x + 3 \\ {}^-4{,}6 &= {}^-2x + 3 \\ {}^-7{,}6 &= {}^-2x \\ x &= 3{,}8 \end{aligned}$$

$(3{,}8,\ {}^-4{,}6)$

b)

$$2x + 8 = {}^-2(x + 2)^2 - 7$$

$${}^-2x^2 - 10x - 23 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{^-\text{b} \pm \sqrt{\text{b}^2 - 4\text{ac}}}{2\text{a}} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{(^-10)^2 - 4 \times {}^-2 \times {}^-23}}{2 \times {}^-2} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{^-84}}{^-4} \end{aligned}$$

$\varnothing$

c)

$${}^-0{,}25x + 0{,}5 = 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 0{,}4$$

$$0{,}2x^2 + 0{,}55x - 0{,}9 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{^-\text{b} \pm \sqrt{\text{b}^2 - 4\text{ac}}}{2\text{a}} \\ &= \frac{^-0{,}55 \pm \sqrt{(0{,}55)^2 - 4 \times 0{,}2 \times {}^-0{,}9}}{2 \times 0{,}2} \end{aligned}$$

$x_1 \approx {}^-3{,}9$ et $x_2 \approx 1{,}15$

$$\begin{aligned} y_1 &= {}^-0{,}25x_1 + 0{,}5 \\ &\approx {}^-0{,}25 \times {}^-3{,}9 + 0{,}5 \\ &\approx 1{,}48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= {}^-0{,}25x_2 + 0{,}5 \\ &\approx {}^-0{,}25 \times 1{,}15 + 0{,}5 \\ &\approx 0{,}21 \end{aligned}$$

$(\approx {}^-3{,}9,\ \approx 1{,}48)$ et $(\approx 1{,}15,\ \approx 0{,}21)$.

d) $x - 2y = {}^-1 \Rightarrow x = 2y - 1$

$$\begin{aligned} y - 3 &= 3x \\ y - 3 &= 3(2y - 1) \\ y - 3 &= 6y - 3 \\ {}^-5y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2y - 1 \\ &= 2 \times 0 - 1 \\ &= {}^-1 \end{aligned}$$

$({}^-1,\ 0)$

e)

$${}^-3x + 5 = 2x^2 + 3x - 4$$

$$2x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{^-\text{b} \pm \sqrt{\text{b}^2 - 4\text{ac}}}{2\text{a}} \\ &= \frac{^-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 2 \times {}^-9}}{2 \times 2} \end{aligned}$$

$x_1 \approx {}^-4{,}1$ et $x_2 \approx 1{,}1$

$$\begin{aligned} y_1 &= {}^-3x_1 + 5 \\ &\approx {}^-3 \times {}^-4{,}1 + 5 \\ &\approx 17{,}29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= {}^-3x_2 + 5 \\ &\approx {}^-3 \times 1{,}1 + 5 \\ &\approx 1{,}71 \end{aligned}$$

$(\approx {}^-4{,}1,\ \approx 17{,}29)$ et $(\approx 1{,}1,\ \approx 1{,}71)$.

f)

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1 \ \Rightarrow\ y = \frac{^-7x}{3} + 7$$

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 1 \ \Rightarrow\ y = \frac{^-3x}{7} + 3$$

$$\begin{aligned} \frac{^-3x}{7} + 3 &= \frac{^-7x}{3} + 7 \\ \frac{^-9x}{21} + \frac{49x}{21} &= 4 \\ 40x &= 84 \\ x &= 2{,}1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{^-7x}{3} + 7 \\ &= \frac{^-7 \times 2{,}1}{3} + 7 \\ &= 2{,}1 \end{aligned}$$

$(2{,}1,\ 2{,}1)$

Page 362

7. a) Équations des droites :
$y = x$
$y = {}^{-}0{,}5x + 1{,}5$
Point d'intersection :
$x = {}^{-}0{,}5x + 1{,}5$
$1{,}5x = 1{,}5$
$x = 1$
$y = 1$
$(1, 1)$

b) Équation de la parabole : $y = {}^{-}(x - 14)^2 + 15$
Équation de la droite : $y = x - 5$
Points d'intersection : $x - 5 = {}^{-}(x - 14)^2 + 15$
$x - 5 = {}^{-}x^2 + 28x - 196 + 15$
$x^2 - 27x + 176 = 0$
$(x - 11)(x - 16) = 0$
$x_1 = 11$ et $x_2 = 16$

$y_1 = x_1 - 5$ et $y_2 = x_2 - 5$
$= 11 - 5$ $\quad = 16 - 5$
$= 6$ $\quad = 11$

$(11, 6)$ et $(16, 11)$.

c) Équation de la droite : $y = x + 3$
Équation de la parabole : $y = (x - 3)^2$
Points d'intersection : $x + 3 = (x - 3)^2$
$x + 3 = x^2 - 6x + 9$
$0 = x^2 - 7x + 6$
$0 = (x - 1)(x - 6)$
$x_1 = 1$ et $x_2 = 6$

$y_1 = x_1 + 3$ et $y_2 = x_2 + 3$
$= 1 + 3$ $\quad = 6 + 3$
$= 4$ $\quad = 9$

$(1, 4)$ et $(6, 9)$.

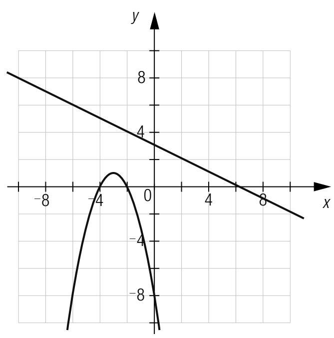
d) Équations des droites :
$y = {}^{-}\frac{3}{2}x + 6$
$y = \frac{3}{2}x + 2$

Point d'intersection :
${}^{-}\frac{3}{2}x + 6 = \frac{3}{2}x + 2$
$6 - 2 = \frac{6}{2}x$
$4 = 3x$
$x = \frac{4}{3}$
$y = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} + 2 = 4$

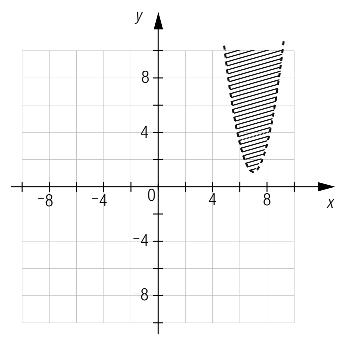
$\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

Page 363

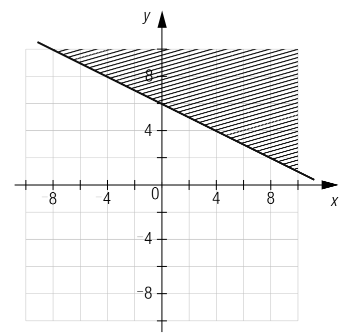
8. a)



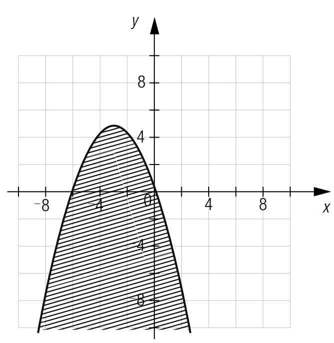
b)



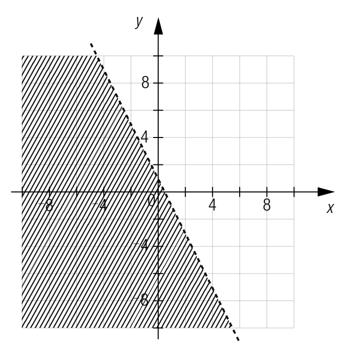
c)



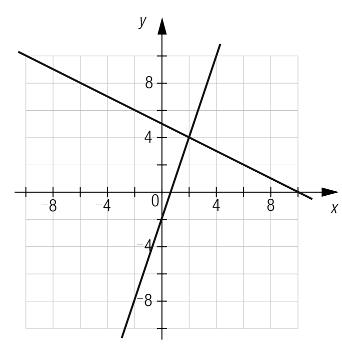
d)



e)



f)



Page 364

9. a)
- Les points de la droite ne font pas partie de la région-solution.
- Le point (0, 0) doit vérifier l'inéquation, donc :
  $y < {}^{-}x + 2$
  $0 < 0 + 2$
  $0 < 2$ est vrai.

$y < {}^{-}x + 2$

b)
- Les points de la parabole font partie de la région-solution.
- Le point (0, 0) ne doit pas vérifier l'inéquation, donc :
  $y \geq (x - 2)^2 - 3$
  $0 \geq (0 - 2)^2 - 3$
  $0 \geq 4 - 3$
  $0 \geq 1$ est faux.

$y \geq (x - 2)^2 - 3$

c)
- Les points de la parabole ne font pas partie de la région-solution.
- Le point (0, 0) ne doit pas vérifier l'inéquation, donc :
  $y > {}^{-}0{,}25(x + 2)^2 + 4$
  $0 > {}^{-}0{,}25(0 + 2)^2 + 4$
  $0 > {}^{-}1 + 4$
  $0 > 3$ est faux.

$y > {}^{-}0{,}25(x + 2)^2 + 4$

10. Variables : x : prix d'une auto (en \$)
y : prix d'un camion (en \$)

Système d'équations : $10x + 12y = 840\,000$
$12x + 10y = 810\,000$

Résoudre le système par la méthode de réduction :

$$\begin{array}{r} 120x + 144y = 10\,080\,000 \\ -\,(120x + 100y = 8\,100\,000) \\ \hline 44y = 1\,980\,000 \end{array}$$

$44y = 1\,980\,000$
$y = 45\,000$

$$\begin{aligned} 10x + 12y &= 840\,000 \\ 10x + 12 \times 45\,000 &= 840\,000 \\ x &= 30\,000 \end{aligned}$$

Couple-solution : (30 000, 45 000)

Réponse : Le prix d'une auto est de 30 000 \$ et celui d'un camion est de 45 000 \$.

11. On peut résoudre ce système par la méthode de réduction.

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= \text{k} \\ 3x + 6y &= \text{k} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 6x + 15y = 3\text{k} \\ -\,(6x + 12y = 2\text{k}) \\ \hline 3y = \text{k} \\ y = \frac{\text{k}}{3} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x + 6 \times \frac{\text{k}}{3} &= \text{k} \\ 3x + 2\text{k} &= \text{k} \\ 3x &= {}^-\text{k} \\ x &= {}^-\frac{\text{k}}{3} \end{aligned}$$

Réponse : Le couple-solution est donc $\left({}^-\frac{\text{k}}{3}, \frac{\text{k}}{3}\right)$.

Page 365

12. Équation de la parabole dont le sommet est (30, 20) et qui passe par le point (0, 29) :

$$\begin{aligned} y &= \text{a}(x - 30)^2 + 20 \\ 29 &= \text{a}(0 - 30)^2 + 20 \\ 29 &= 900\text{a} + 20 \\ 9 &= 900\text{a} \\ \text{a} &= 0{,}01 \end{aligned}$$

Équation de la parabole : $y = 0{,}01(x - 30)^2 + 20$

Équation à résoudre :

$$\begin{aligned} 0{,}01(x - 30)^2 + 20 &= 0{,}1x + 23 \\ 0{,}01(x^2 - 60x + 900) + 20 &= 0{,}1x + 23 \\ 0{,}01x^2 - 0{,}6x + 29 &= 0{,}1x + 23 \\ 0{,}01x^2 - 0{,}7x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{{}^-\text{b} \pm \sqrt{\text{b}^2 - 4\text{ac}}}{2\text{a}} \\ &= \frac{0{,}7 \pm \sqrt{({}^-0{,}7)^2 - 4 \times 0{,}01 \times 6}}{2 \times 0{,}01} \end{aligned}$$

$x_1 = 10$ et $x_2 = 60$

Les solutions pour x sont 10 et 60.

Réponse : Les avions se trouvent à la même altitude à 10 s et à 60 s.

13. Équation de la droite : $y = 25$

Équation de la parabole :

Sommet : S(20, 5)

Point de la courbe : A(0, 25)

$$\begin{aligned} 25 &= \text{a}(0 - 20)^2 + 5 \\ 25 &= 400\text{a} + 5 \\ 20 &= 400\text{a} \\ \text{a} &= 0{,}05 \end{aligned}$$

$y = 0{,}05(x - 20)^2 + 5$

- Le point (0, 0) doit vérifier l'inéquation dont la droite frontière est $y = 25$ et ne doit pas vérifier l'inéquation dont la courbe frontière est $y = 0{,}05(x - 20)^2 + 5$.

  Le point (0, 0) vérifie l'inéquation $y \leq 25$: $0 \leq 25$ est vrai.
- Le point (0, 0) ne vérifie pas l'inéquation $y \geq 0{,}05(x - 20)^2 + 5$:

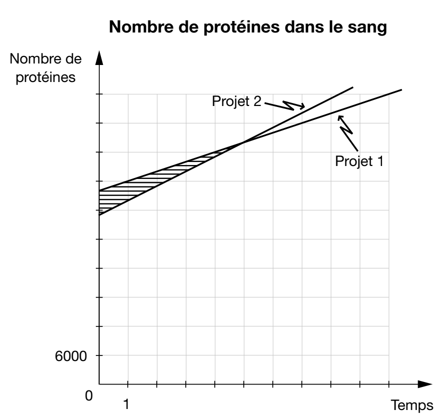
  $0 \geq 0{,}05(0 - 20)^2 + 5$
  $0 \geq 0{,}05 \times 400 + 5$
  $0 \geq 25$ est faux.

Réponse : Les inéquations sont $y \leq 25$ et $y \geq 0{,}05(x - 20)^2 + 5$.

Page 366

14. a) $P_1 \leq 2000t + 40\,000$
$P_2 \geq 3000t + 35\,000$,
où P_1 et P_2 représentent respectivement les quantités de protéines par millilitre de sang dans le premier et le second projet et t, le temps écoulé en heures.

b)



c) $P_1 = 2000t + 40\,000$
$P_2 = 3000t + 35\,000$

$$\begin{aligned} 2000t + 40\,000 &= 3000t + 35\,000 \\ 1000t &= 5000 \\ t &= 5 \text{ h} \end{aligned}$$

Réponse : La dernière fois que les deux projets pourraient dénombrer la même quantité de protéines est 5 heures après le début. Après ce temps, le nombre de protéines du second projet sera toujours plus grand que celui du premier projet.

15. Variables : x : nombre d'espaces de 9 m^2
y : nombre d'espaces de 15 m^2

Équations représentant la situation : $9x + 15y = 186$
$100x + 150y = 1950$

$$\begin{array}{rl} & 100x + 150y = 1950 \\ - & (90x + 150y = 1860) \\ \hline & 10x \qquad = 90 \\ & x = 9 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 100 \times 9 + 150y &= 1950 \\ 150y &= 1050 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

Réponse : Pour vérifier la qualité du sol, 9 espaces de 9 m^2 et 7 espaces de 15 m^2 ont été utilisés.

Page 367

16. x : quantité de médicament A
y : quantité de médicament B

Les équations qui représentent la situation sont :
$x + y = 100\ 000$
$15x + 15y = 1\ 500\ 000$

En divisant la seconde équation par 15, on obtient la première :

$$\frac{1}{15}(15x + 15y) = \frac{1}{15}(1\ 500\ 000)$$
$$x + y = 100\ 000$$

Les deux équations sont identiques.

Réponse : Les équations sont identiques. Leurs courbes sont donc parallèles et confondues dans un plan cartésien. Il y a donc une infinité de solutions. C'est pour cette raison que le dirigeant ne peut pas déterminer la quantité de médicament de chaque type qu'il doit produire.

17. Résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} x^2 - 16x + 64 &= x^2 - 3x - 40 \\ {}^-13x + 104 &= 0 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Aire du carré si $x = 8$ cm :

$$\begin{aligned} A_{\text{carré}} &= x^2 - 16x + 64 \\ &= 8^2 - 16 \times 8 + 64 \\ &= 0 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Aire du rectangle si $x = 8$ cm :

$$\begin{aligned} A_{\text{rectangle}} &= x^2 - 3x - 40 \\ &= 8^2 - 3 \times 8 - 40 \\ &= 0 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Si $x = 8$, l'aire des figures est nulle dans les deux cas et ces figures n'existent pas.

18. x : temps écoulé (en semaines)
y : masse (en kg)

Équations qui représentant la situation : $y = {}^-0{,}5x + 79$
$y = {}^-0{,}8x + 88$

$$\begin{aligned} {}^-0{,}5x + 79 &= {}^-0{,}8x + 88 \\ 0{,}3x &= 9 \\ x &= 30 \text{ semaines} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= {}^-0{,}5x + 79 \\ &= {}^-0{,}5 \times 30 + 79 \\ &= 64 \text{ kg} \end{aligned}$$

Réponse : Félicia a raison. Après 30 semaines, les deux amies devraient atteindre la même masse, soit 64 kg.

Page 368

19. L'ordonnée à l'origine de la droite est ${}^-2$.

La parabole de sommet $S_1(4, 6)$ passe par le point $(0, {}^-2)$.

Son équation est :
$$\begin{aligned} {}^-2 &= a(0 - 4)^2 + 6 \\ {}^-2 &= a \times 16 + 6 \\ {}^-8 &= 16a \\ a &= {}^-0{,}5 \\ y &= {}^-0{,}5(x - 4)^2 + 6 \end{aligned}$$

Calcul des coordonnées du point d'intersection B :

$$\frac{4}{3}x - 2 = {}^-0{,}5(x - 4)^2 + 6$$
$$\frac{4}{3}x - 2 = {}^-0{,}5x^2 + 4x - 8 + 6$$
$$0{,}5x^2 - \frac{8}{3}x = 0$$
$$0{,}5x\left(x - \frac{16}{3}\right) = 0$$
$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 = \frac{16}{3}$$

L'abscisse du point B est $\frac{16}{3}$ et son ordonnée est :

$$y = \frac{4}{3} \times \frac{16}{3} - 2 = \frac{46}{9}$$

L'équation de la courbe qui passe par S_2 est de la forme $y = a(x - 2)^2 + k$ et passe par les points $(0, {}^-2)$ et $\left(\frac{16}{3}, \frac{46}{9}\right)$.

En substituant ces deux coordonnées aux variables dans l'équation, on obtient le système d'équations suivant :

$${}^-2 - 4a = k$$
$$\frac{46}{9} - \frac{100}{9}a = k$$

$$\begin{aligned} {}^-2 - 4a &= \frac{46}{9} - \frac{100}{9}a \\ {}^-2 - \frac{46}{9} &= {}^-\frac{100}{9}a + 4a \\ {}^-\frac{64}{9} &= {}^-\frac{64}{9}a \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= {}^-2 - 4a \\ &= {}^-2 - 4 \times 1 \\ &= {}^-6 \end{aligned}$$

Réponse : L'équation de la parabole qui passe par S_2 est $y = (x - 2)^2 - 6$.

20. **1)** Par la méthode de comparaison, on a :

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx &= ax \\ Ax^2 + Bx - ax &= 0 \\ Ax^2 + x(B - a) &= 0 \\ x(Ax + B - a) &= 0 \end{aligned}$$

2) De l'équation précédente, on déduit que :

$x = 0$ ou $Ax + B - a = 0$

$$\begin{aligned} Ax &= a - B \\ x &= \frac{a - B}{A} \end{aligned}$$

3) Si $x = 0$, alors $y = ax = a \times 0 = 0$

Si $x = \frac{a - B}{A}$, alors $y = ax = a \times \frac{a - B}{A} = \frac{a^2 - Ba}{A}$

Les solutions sont donc $(0, 0)$ et $\left(\frac{a - B}{A}, \frac{a^2 - Ba}{A}\right)$.

Pages 369-370

21. Déterminer les équations des deux droites qui supportent les segments correspondant aux poutres d'acier passant par A.

Équation de la droite qui supporte le segment DA : $y = 2,5x - 10$

Équation de la droite qui supporte le segment EA : $y = 7,5x - 60$

Pour déterminer les coordonnées du point A, on doit résoudre le système d'équations :

$y = 2,5x - 10$
$y = 7,5x - 60$

$$2,5x - 10 = 7,5x - 60$$
$$50 = 5x$$
$$x = 10$$

$$y = 2,5 \times 10 - 10$$
$$= 15$$

La solution de ce système est (10, 15).

L'équation de la parabole supportant le tunnel est de la forme $y = a(x - h)^2 + k$ et la courbe passe par les points (0, 0) et A(10, 15). Sa hauteur étant de 20 m, on peut poser les deux équations suivantes :

$$0 = a({}^{-}h)^2 + 20$$
$$0 = ah^2 + 20$$
$${}^{-}20 = ah^2$$
$$\frac{{}^{-}20}{h^2} = a$$

$$15 = a(10 - h)^2 + 20$$
$${}^{-}5 = a(10 - h)^2$$
$$\frac{{}^{-}5}{(10 - h)^2} = a$$

Résoudre le système composé de ces deux équations pour déterminer les valeurs de a et de h.

$$a = \frac{{}^{-}20}{h^2}$$
$$a = \frac{{}^{-}5}{(10 - h)^2}$$
$$\frac{{}^{-}20}{h^2} = \frac{{}^{-}5}{(10 - h)^2}$$

$${}^{-}20(10 - h)^2 = {}^{-}5h^2$$
$${}^{-}20(100 - 20h + h^2) = {}^{-}5h^2$$
$${}^{-}2000 + 400h - 20h^2 = {}^{-}5h^2$$
$$15h^2 - 400h + 2000 = 0$$
$$h = \frac{400 \pm \sqrt{({}^{-}400)^2 - 4 \times 15 \times 2000}}{2 \times 15}$$

$h_1 = \frac{20}{3}$ et $h_2 = 20$. On doit rejeter h_1.

$$a = {}^{-}\frac{20}{h^2}$$
$$= {}^{-}\frac{20}{20^2} = {}^{-}0,05$$

Solution de ce système : $a = {}^{-}0,05$ et $h = 20$.

Équation de la parabole supportant le tunnel :
$y = {}^{-}0,05(x - 20)^2 + 20$

La structure est symétrique par rapport à l'axe $x = 20$. On peut donc déduire les coordonnées des points B, F, G et H de la façon suivante.

- B(x, y) et A(10, 15) sont symétriques, donc $x = 20 + 10 = 30$ et $y = 15$: B(30, 15).
- F(x, y) et E(8, 0) sont symétriques, donc $x = 20 + 12 = 32$ et $y = 0$: F(32, 0).
- G(x, y) et D(4, 0) sont symétriques, donc $x = 20 + 16 = 36$ et $y = 0$: G(36, 0).
- H(x, y) et C(0, 0) sont symétriques, donc $x = 20 + 20 = 40$ et $y = 0$: H(40, 0).

Réponse :

Informations manquantes					
Coordonnées des points					Équation de la parabole supportant le tunnel
A	B	F	G	H	
(10, 15)	(30, 15)	(32, 0)	(36, 0)	(40, 0)	$y = {}^{-}0,05(x - 20)^2 + 20$

Pages 371-372

22. Le revenu total R de la vente des tablettes correspond à l'équation :
$R = NP$
$R = ({}^{-}200P + 80\ 000)P = {}^{-}200P^2 + 80\ 000P$

Le coût total C de production des tablettes correspond à l'équation :
$C = 100N + 900\ 000$

En remplaçant N par (${}^{-}200P + 80\ 000$), on obtient :
$C = 100({}^{-}200P + 80\ 000) + 900\ 000$
$C = {}^{-}20\ 000P + 8\ 900\ 000$

Profit = Revenu total − Coût total de production
Profit = $R - C$
Profit = ${}^{-}200P^2 + 80\ 000P - ({}^{-}20\ 000P + 8\ 900\ 000)$
Profit = ${}^{-}200P^2 + 100\ 000P - 8\ 900\ 000$

Le profit est nul lorsque ${}^{-}200P^2 + 100\ 000P - 8\ 900\ 000 = 0$.

$$P = \frac{{}^{-}100\ 000 \pm \sqrt{100\ 000^2 - 4 \times {}^{-}200 \times {}^{-}8\ 900\ 000}}{2 \times {}^{-}200}$$
$$= \frac{{}^{-}100\ 000 \pm \sqrt{100\ 000^2 - 7\ 120\ 000\ 000}}{{}^{-}400}$$

$P_1 \approx 115,84$ et $P_2 \approx 384,16$

Pour obtenir un profit nul, l'entreprise doit donc vendre les tablettes à un prix d'environ 115,84 \$ ou d'environ 384,16 \$.

Le milieu de ces deux valeurs, soit 250 \$, correspond à l'abscisse du sommet de la parabole associée au profit. L'ordonnée du sommet étant le maximum, l'entreprise doit donc vendre les tablettes à un prix de 250 \$ pour faire un profit maximal. Le profit maximal est alors :

Profit = ${}^{-}200P^2 + 100\ 000P - 8\ 900\ 000$
$= {}^{-}200 \times 250^2 + 100\ 000 \times 250 - 8\ 900\ 000$
$= 3\ 600\ 000$ \$

Réponse : Si l'entreprise fixe le prix de la tablette à 250 \$, elle peut espérer un profit maximal de 3 600 000 \$.

23. Équation de la droite qui supporte le côté gauche du terrain :
$x + y - 90 = 0$
Coordonnées du point B qui correspondent à l'ordonnée à l'origine :
(0, 90)

Déterminer les coordonnées du point A en résolvant le système d'équations :
$x + y - 90 = 0$
$x - y - 50 = 0$

$$\begin{array}{r} x + y - 90 = 0 \\ \underline{-\ (x - y - 50 = 0)} \\ 2y - 40 = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2y - 40 &= 0 \\ 2y &= 40 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 20 - 90 &= 0 \\ x - 70 &= 0 \\ x &= 70 \end{aligned}$$

Les coordonnées du point A sont (70, 20).

La distance du point A au point S étant de 119 m, les coordonnées du sommet de la parabole sont (70, 139).

La parabole de sommet (70, 139) passe par le point (0, 90).

$$\begin{aligned} y &= a(x - h)^2 + k \\ 90 &= a(0 - 70)^2 + 139 \\ 90 &= 4900a + 139 \\ a &= {}^-0{,}01 \end{aligned}$$

Son équation est
$y = {}^-0{,}01(x - 70)^2 + 139$.

Écrire les équations des droites $x + y - 90 = 0$ et $x - y - 50 = 0$ sous la forme fonctionnelle :
$y = {}^-x + 90$ et $y = x - 50$

Déterminer les régions-solutions :

- Région au-dessous de la parabole.

  Le point (0, 0) vérifie
  $y \leq {}^-0{,}01(x - 70)^2 + 139$, car :
  $0 \leq {}^-0{,}01(0 - 70)^2 + 139$
  $0 \leq {}^-49 + 139$
  $0 \leq 90$ est vrai.

- Région au-dessus de la droite de pente négative.

  Le point (0, 0) ne vérifie pas
  $y \geq {}^-x + 90$, car :
  $0 \geq 0 + 90$
  $0 \geq 90$ est faux.

- Région au-dessus de la droite de pente positive.

  Le point (0, 0) vérifie
  $y \geq x - 50$, car :
  $0 \geq 0 - 50$
  $0 \geq {}^-50$ est vrai.

Réponse : Les inéquations dont l'ensemble-solution commun correspond au terrain sont : $y \geq {}^-x + 90$
$y \geq x - 50$
$y \leq {}^-0{,}01(x - 70)^2 + 139$

L'architecte a donc commis une erreur dans l'inéquation correspondant à la clôture.